

Marika Toivola ja Tiina Härkönen

AVOIN MATEMATIIKKA 9

Osio 3: Geometrian tietojen syventämistä

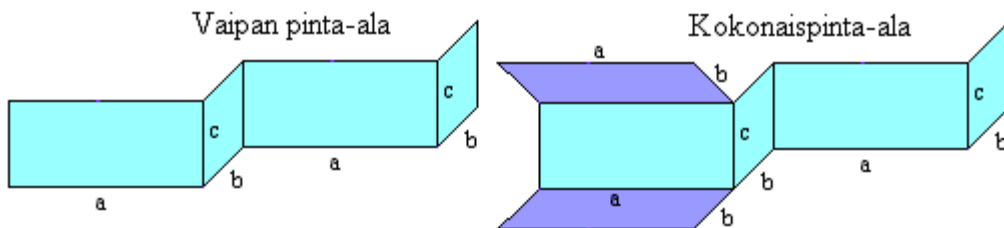
Sisältö on lisensoitu avoimella CC BY 3.0 -lisenssillä.

8. Kappaleiden pinta-aloja

Kappaleiden *kokonaispinta-ala*ssa huomioidaan sen kaikkien osien pinta-alat. *Vaipan pinta-alaan* ei puolestaan lasketa kappaleen kannen ja pohjan pinta-aloja.

Suorakulmainen särmiö

Ennen kuin suorakulmaisen särmiön vaipan alaa voidaan laskea, on sovittava mitkä särmiön tahkoista ovat kappaleen seinämiä ja mitkä puolestaan pohjia.

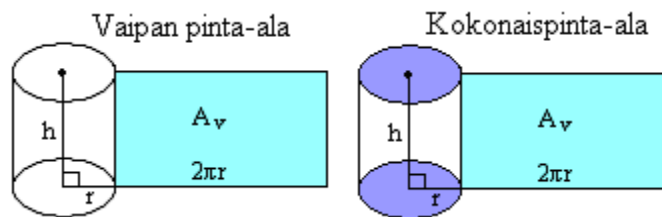


Suorakulmaisen särmiön

vaipan pinta-ala on $A_v = ac + bc + ac + bc = 2ac + 2bc$.

kokonaispinta-ala on $A = A_v + ab + ab = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$.

Ympyrälieriö

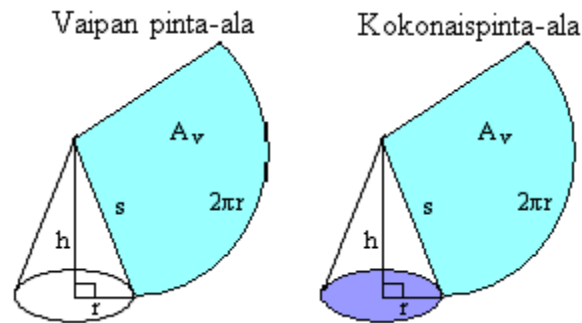


Ympyrälieriön

vaipan pinta-ala on $A_v = 2\pi rh$.

kokonaispinta-ala on $A = A_v + 2\pi r^2 = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$.

Ympyräkartio



Ympyräkartion vaippa muodostuu ympyräsektorin osasta, jonka kaaren pituus on kartion pohjaympyrän piiri ($2\pi r$) ja säde s .

Ympyräkartion

vaipan pinta-ala on $A_v = \pi r s$.

kokonaispinta-ala on $A = A_v + \pi r^2 = \pi r s + \pi r^2 = \pi r (r + s)$.

Esimerkki 1.

Laske kissanruokapurkin vaipan pinta-ala. Paljonko peltiä on tarvittu purkin valmistamiseen?

Ratkaisu:

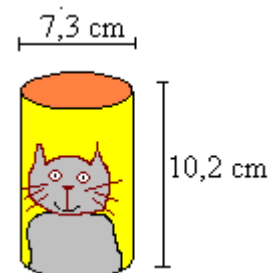
Vaipan pinta-ala on

$$A_v = 2\pi r h = 2\pi \cdot 3,65 \text{ cm} \cdot 10,2 \text{ cm} \approx 233,923 \text{ cm}^2 \approx 234 \text{ cm}^2.$$

Tarvittavan peltimäärän kertoo purkin kokonaispinta-ala.

$$A = A_v + 2\pi r^2 = 233,923 \text{ cm}^2 + 2\pi \cdot (3,65 \text{ cm})^2 \approx 318 \text{ cm}^2$$

Vastaus: Purkin vaipan pinta-ala on 243 cm^2 ja kokonaispinta-ala on 318 cm^2 .



Huom! Jos tilavuudeltaan tietynkokoisen ympyrälieriön kokonaispinta-ala halutaan mahdollisimman pieneksi, täytyy lieriön korkeuden olla yhtä suuri kuin sen pohjan halkaisija. Usein lieriön muotoisissa metallipurkeissa korkeus on kuitenkin 1,4 kertaa halkaisijan pituinen. Pyöreiden päätyjen valmistamisessa syntyy hukkapaloja, joten pelkkä pinta-alan tarkastelu ei riitä kustannusarviointeja tehtäessä.

Tehtäviä

174.

Ilmoita oma pituutesi

- a) millimetreinä
- b) desimetreinä
- c) dekametreinä.

175.

Suorita yksikkömuunnokset.

- a) $2 \text{ m}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$
- b) $3,5 \text{ m}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dm}^2$
- c) $5 \text{ ha} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}^2$
- d) $14 \text{ dm}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}^2$

176.

Muunna neliömetreiksi.

- a) 5 km^2
- b) 6 ha
- c) 9 a
- d) 230 dm^2
- e) $30\,000 \text{ cm}^2$
- f) $140\,000 \text{ mm}^2$

177.

Muunna sulkeissa mainituksi yksiköksi.

- a) 5 km^2 (ha)
- b) 100 ha (m^2)
- c) 23 a (m^2)
- d) $15,7 \text{ dm}^2$ (cm^2)
- e) $56\,000 \text{ mm}^2$ (dm^2)
- f) 250 m^2 (a)

178.

Laske kuution kokonaispinta-ala, kun särmä on

- a) 18,0 cm
- b) 1,5 m
- c) 9,0 mm.

179.

Tiiliskiven mitat ovat 27,0 cm, 15,0 cm ja 7,0 cm. Laske tiiliskiven kokonaispinta-ala.

180.

Nopan särmä on 1,1 cm. Ilmoita nopan kokonaispinta-ala neliömillimetreinä.

181.

What is the surface area of a rectangular prism with the given dimensions? Length = 8 cm, width = 2 cm, height = 4 cm.

182.

Suklaarasia, jonka pituus on 37,0 cm, leveys 21,0 cm ja korkeus 3,0 cm paketoidaan lahjaperilla. Laske tarvittavan paperin pinta-ala, kun taitevaraa ei oteta huomioon.

soveltavat tehtävät

183.

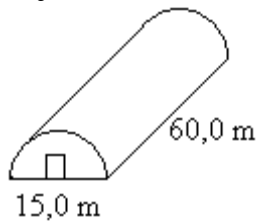
Ananaspurkin halkaisija on 8,4 cm ja korkeus 5,0 cm. Hedelmäcocktailpurkin vastaavat mitat ovat 7,3 cm ja 18,0 cm. Kumman valmistamiseen on tarvittu vähemmän peltiä?

184.

Teresa tekee naamiaisia varten itselleen ympyräkartion muotoisen hatun. Hänen päänympäryksensä on 53,0 cm ja hatun sivusauman pituudeksi hän haluaa 40,0 cm. Paljonko kangasta hän tarvitsee hattuun?

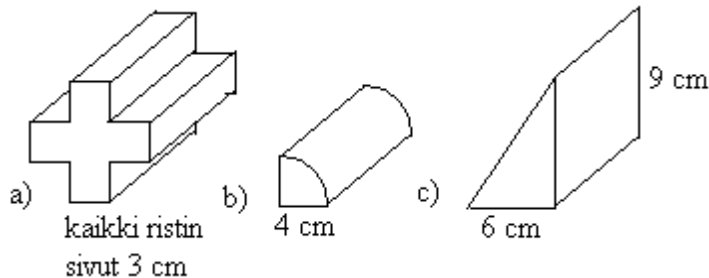
185.

Paljonko muovia tarvitaan kasvihuoneen kattamiseen (päädyt mukaan lukien)?



186.

Kolme erimuotoista lieriötä ovat pituudeltaan 12 cm. Laske lieriöiden kokonaispinta-alat kolmen numeron tarkkuudella.



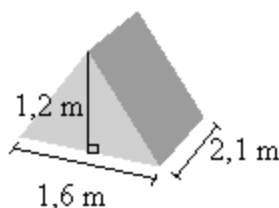
187.

Muodosta laskukaavat kuution, jonka särmän pituus on s ,

- a) vaipan pinta-alalle
- b) kokonaispinta-alalle.

188.

Laske teltan kokonaispinta-ala.

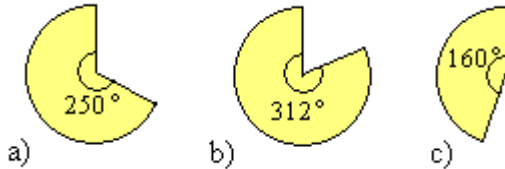


189.

What is the surface area of a cylinder with the given dimensions? Radius = 6 cm, height = 3 cm.

190.

Laske ympyräsektorista muodostettavien kartioiden vaippojen pinta-alat, kun ympyräsektorien säteet ovat 15 cm.



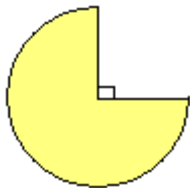
191.

Mitkä ovat edellisen tehtävän kartioiden pohjien säteet senttimetrin tarkkuudella?

192.

Ympyränmuotoisesta pahvilevystä, jonka säde on 35 cm, leikataan oheisen kuvan mukainen pala ja muodostetaan siitä kartion vaippa. Mikä on

- pohjaympyrän säde?
- muodostuvan kartion korkeus?
- kartioiden vaipan pinta-ala?



193.

Laske ekologisen jalanjäljen avulla, montako maapalloa tarvittaisiin kaikkien ihmisen kulu-
tustarpeiden tyydyttämiseen, jos kaikki maapallon ihmiset olisivat

- amerikkalaisia
- kiinalaisia
- qatarilaisia.

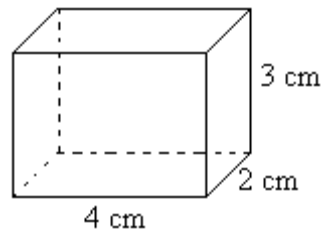
_____ **vaativat tehtävät** _____

194.

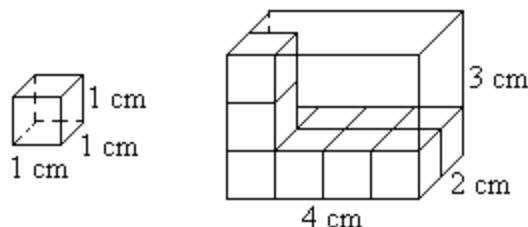
Ympyrälieriön sädettä pienennetään 10 % ja korkeutta kasvatetaan 10 %. Suureneeko vai pienee-
neekö ympyrälieriön vaipan ala ja kuinka paljon?

9. Tilavuuden mittayksiköt

Tarkastellaan suorakulmaista särmiötä, jonka pituus on 4 cm, leveys 2 cm ja korkeus 3 cm.



Selvitetään suorakulmaisen särmiön tilavuus tutkimalla, montako kertaa valittu mittayksikkö mahtuu suorakulmion sisälle. Koska suorakulmion mitat on annettu senttimetreissä, on luonnollista valita tarkasteltavaksi mittayksiköksi kuutio, jonka jokainen sivu on senttimetrin pituinen.



Suorakulmaisen särmiön pohjalle sopii $4 \cdot 2 = 8$ pientä kuutiota ja tällaisia kerroksia muodostuu kolme eli kaikkiaan kuutioita mahtuu särmiön sisälle $3 \cdot 8 = 24$. Suorakulmaisen särmiön tilavuus siis saadaan pohjan pinta-alan ja korkeuden tulona.

Jos suorakulmaisen särmiön särmien pituudet ovat a , b ja c , on sen tilavuus

$$V = abc.$$

Tilavuuden yksiköksi saadaan $[V] = [a][b][c] = \text{cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{cm} = \text{cm}^3$.

Tilavuusmitat

Tilavuusmittayksiköt ovat pituusmittayksiköiden kolmansia potensseja eli kuutioita. Pituusmittojen suhdeluku on 10, jolloin tilavuusmittojen suhdeluvun on oltava $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. Seuraavaan mittayksikköön siirryttäessä on siis pilkun paikkaa siirrettävä kolme askelta.

tunnus	nimi	perusyksiköissä
mm^3	kuutiomillimetri	$0,000000001 \text{ m}^3$
cm^3	kuutiosenttimetri	$0,000001 \text{ m}^3$
dm^3	kuutiodesimetri	$0,001 \text{ m}^3$

m^3	kuutiometri	$1 m^3$
-------	-------------	---------

Vetomitat

Vetomittoja käytetään nestemäisten aineiden tilavuuksia ilmaistaessa. Peräkkäisten vetomittojen suhdeluku on 10. Seuraavaan vetomittaan siirryttäessä on siis pilkun paikkaa siirrettävä ainoastaan yksi askel.

tunnus	nimi	perusyksiköissä
ml	millilitra	0,001 l
cl	senttilitra	0,01 l
dl	desilitra	0,1 l
l	litra	1 l

Tilavuus- ja vetomitoissa on toisiaan vastaavia yksiköitä, esimerkiksi **1 litra = 1 dm³**.

Esimerkki 1.

Muunnetaan 540 000 000 mm³ kuutiometreiksi vaiheittain

$$540\,000\,000 \text{ mm}^3 = 540\,000 \text{ cm}^3$$

$$540\,000 \text{ cm}^3 = 540 \text{ dm}^3$$

$$540 \text{ dm}^3 = 0,54 \text{ m}^3$$

Vastaus: 540 000 000 mm³ on yhtä kuin 0,54 m³.

Esimerkki 2.

Muunnetaan 0,55 litraa kuutiosenttimetreiksi

$$0,55 \text{ l} = 0,55 \text{ dm}^3 = 550 \text{ cm}^3$$

Vastaus: 0,55 litraa on 550 cm³.

Tehtäviä

195.

Lue parillisesi ääneen tilavuudet.

- a) $3,1 \text{ m}^3$
- b) 210 cm^3
- c) 8 mm^3
- d) $1,6 \text{ dm}^3$

196.

Laske kuution tilavuus, kun sen särmä on

- a) 2,0 cm
- b) 5,0 mm
- c) 3,2 m
- d) 12,0 dm.

197.

Laske suorakulmaisen särmiön tilavuus, jonka mitat ovat

- a) 4 cm, 6 cm ja 9 cm
- b) 5,0 m, 2,1 m ja 1,8 m
- c) 2,3 m, 78 cm ja 21 mm.

198.

Tiiliskiven mitat ovat 27,0 cm, 15,0 cm ja 7,0 cm. Ilmoita tiiliskiven tilavuus kuutiosenttimetreinä ja kuutiodesimetreinä.

199.

Muuta yhtä yksikköä pienemmäksi.

- a) 2 m^3
- b) 15 cm^3
- c) $0,09 \text{ dm}^3$
- d) $0,0001 \text{ m}^3$

200.

Muuta yhtä yksikköä suuremmiksi.

- a) 25 dm^3
- b) $0,4 \text{ cm}^3$
- c) 200 mm^3
- d) 5000 dm^3

201.

Muuta yhtä yksikköä pienemmäksi.

- a) 4 m^3
- b) $1,7 \text{ cm}^3$
- c) $0,11 \text{ dm}^3$
- d) $0,0005 \text{ m}^3$

202.

Muuta yhtä yksikköä suuremmiksi.

- a) 65 dm^3

- b) $0,44 \text{ cm}^3$
- c) 820 mm^3
- d) 1000 dm^3

203.

Ilmoita vetomitat kuutiomittoina.

- a) 3 ml
- b) 0,5 l
- c) 162 cl
- d) 0,7 dl

204.

Ilmoita kuutiomitat vetomittoina.

- a) 5 dm^3
- b) $0,05 \text{ m}^3$
- c) 15 mm^3
- d) 600 cm^3

205.

State whether each of these is a length, an area or a volume.

- a) 6 m^3
- b) 3 cm^2
- c) $2\pi \text{ cm}$
- d) 21 mm^3
- e) $0,15 \text{ cm}^2$
- f) 2000 mm^3
- g) $6\pi \text{ dm}^2$
- h) 289 m

206.

Muuta yhtä yksikköä pienemmäksi.

- a) 4 cl
- b) 0,012 l
- c) 0,03 dl
- d) 50 l

207.

Muuta yhtä yksikköä suuremmiksi.

- a) 23 dl
- b) 410 cl
- c) 0,2 dl
- d) 2,02 ml

208.

Ilmoita vetomitat kuutiomittoina.

- a) 43 ml
- b) 0,55 l
- c) 360 cl
- d) 0,8 dl

209.

Ilmoita kuutiomitat vetomittoina.

- a) $2,8 \text{ dm}^3$
- b) $0,95 \text{ m}^3$
- c) 25 mm^3
- d) 612 cm^3

————— soveltavat tehtävät —————

210.

Kuinka pitkä on kuution särmä, jos kuution tilavuus on

- a) 64 cm^3
- b) 216 cm^3
- c) 1000 cm^3 ?

211.

Yhdysvalloissa käytetään tilavuusmittana gallonia (gallon), joka on 3,79 litraa. Jos auton bensatankkiin mahtuu 66,2 litraa, niin kuinka monta gallonia siihen mahtuu?

212.

Englannissa on tilavuusmittana käytössä pintti (pint), joka on 5,68 dl. Jos boolia on 8 litraa, niin montako pinttiä sitä on?

213.

Montako litraa mansikoita mahtuu laatikkoon, jonka pituus on 40 cm, leveys 32 cm ja korkeus 15 cm?

214.

Yhden mehupisaran tilavuus on noin $0,1 \text{ cm}^3$. Kuinka monta mehupisaraa on litran mehupurkissa?

215.

Sateen mittaus- ja tilastoyksikkö on millimetri. Tällä tarkoitetaan sen vesikerroksen paksuutta, joka sataa yhden neliömetrin pinta-alalle. Sademäärä eräänä päivänä oli 10 mm. Paljonko vettä satoi suorakulmion muotoiselle pituudeltaan 180 m ja leveydeltään 150 m olevalle pellolle, kun yksi litra vettä painaa yhden kilogramman?

216.

Tien pituus on 3,0 km ja leveys 4,0 m. Tielle ajetaan 5,0 cm kerros soraa. Kuinka monta $8,0 \text{ m}^3$ kuormaa tarvitaan? (pääsykoetehtävä teknikkokoulutukseen, kevät 1993)

217.

Paljonko uima-altaan, jonka pituus on 12 m ja leveys 7 m, vedenpinta laskee, kun siitä otetaan 7000 litraa vettä pois?

218.

Uima-altaassa on vettä 3750 m^3 . Altaan syvyys on 3 m ja pituutta sillä on kaksi kertaa enemmän kuin leveyttä. Kuinka pitkä allas on?

219.

Laatikko, jonka mitat ovat 50 cm, 30 cm ja 40 cm, täytetään paketeilla. Montako pakettia laatikkoon mahtuu, kun pakettien mitat ovat 10 cm, 6 cm ja 12 cm?

vaativat tehtävät

220.

Pituudet a , b ja c on mitattu senttimetreissä. Lasketaanko seuraavilla kaavoilla pituutta, pinta-alaa vai tilavuutta?

a) $K = abc$

b) $R = 4a^2$

c) $B = \pi c^2$

d) $L = \frac{4}{3}\pi b^3$

e) $Y = 4a + 3b$

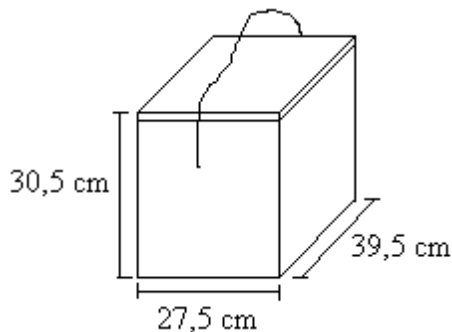
f) $G = 2\pi a^2$

g) $X = 3ab$

h) $M = 9c^2$

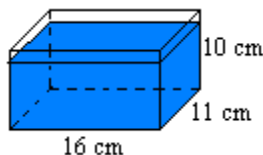
221.

Oheisen kuvion mukaisen suorakulmaisen särmiön muotoisen kylmälaukun seinien ja pohjan paksuudet ovat 2,5 cm sekä levymäisen kannen paksuus on 3,0 cm. Määritä laukun sisätilavuus litroina. (pääsykoetehtävä teknikkokoulutukseen, kevät 1991)



222.

Suorakulmion muotoinen lasinen astia, jonka mitat löytyvät kuvasta, täytetään vedellä ja pakastetaan. Vesi laajenee jäätyessään 10 %. Kuinka korkealle vettä voi kaataa, jotta astia ei hajoa pakkasessa?



223.

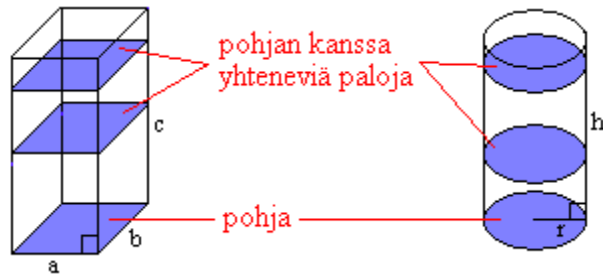
Laatikkoon on pakattu tiiviisti 12 kappaletta suorakulmaisen särmiön muotoisia liituja, joiden poikkileikkaus on neliö. Laatikon sisäosan tilavuus on 230 cm^3 . Määritä liidun pituus, kun poikkileikkauksen sivun pituus on 1,5 cm. (pääsykoetehtävä teknikkokoulutukseen, kevät 1992)

224.

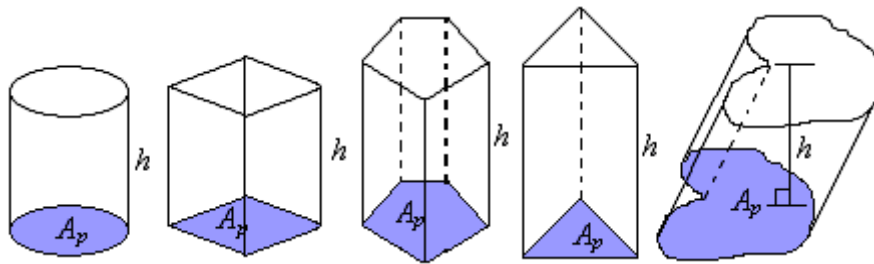
Kolmesta vahakuutiosta, joiden särmät ovat 3 cm, 4 cm ja 5 cm, leivotaan yksi ainoa kuutio. Laske tämän särmän pituus. Kuinka monta prosenttia tässä toimituksessa kokonaispinta-ala muuttuu? (yo kevät 1994)

10. Lieriön tilavuus

Tarkastellaan suorakulmisen särmiön ja suoran ympyrälieriön muotoisia kappaleita. Kappaleen tilavuuden voidaan ajatella muodostuvan siten, että täytetään kappale pohjan kanssa yhtenevillä paloilla.



Mittaustarkkuuden, jolla kappaleiden korkeudet (tässä c ja h) on annettu, voidaan ajatella muodostuvan pudotettujen palojen paksuudesta. Jos korkeus on annettu senttimetrin tarkkuudella, ovat palat paksuudeltaan yhden senttimetrin.



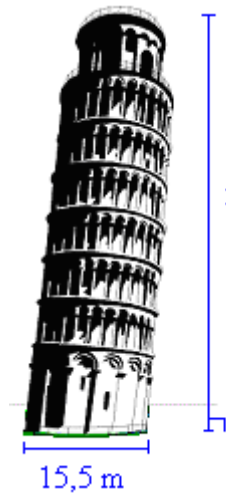
Riippumatta lieriön pohjan muodosta tai siitä onko kyseessä suora vai vino lieriö lasketaan sen tilavuus samalla tavalla.

Lieriön tilavuus saadaan pohjan pinta-alan A_p ja korkeuden h tulona.

$$V = A_p h$$

Huom! Jos lieriö on vino, on korkeus lieriön kannen kohtisuoraan mitattu etäisyys pohjasta.

Esimerkki 1.



Lasketaan Italiassa sijaitsevan Pisan kaltevan tornin tilavuus. Oletetaan tornin olevan kauttaaltaan saman levyinen. Pohjan halkaisija on 15,5 m ja tornin korkeus 55,9 m.

Torni on muodoltaan ympyrälieriö, jonka pohjan pinta-ala on $A_p = \pi r^2$ ja korkeus h , joten tilavuus saadaan lasketuksi kaavalla $V = \pi r^2 h$.

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot (7,75 \text{ m})^2 \cdot 55,9 \text{ m} = 10547,87\dots \text{ m}^3 \approx 10500 \text{ m}^3.$$

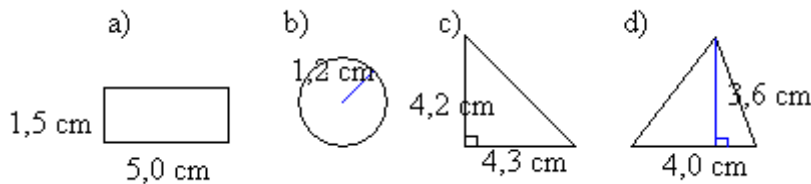
Vastaus: Pisan kaltevan tornin tilavuus on 10500 m^3 .

Jos laskussa olisi haluttu olla tarkkoja, mikä olisi pitänyt ottaa huomioon?

Tehtäviä

225.

Laske kuvassa olevien lieriön pohjien pinta-alat.



226.

Valmistetaan neljä 12,5 cm korkuista lieriötä, joissa pohjina käytetään edellisen tehtävän pohjia. Laske lieriöiden tilavuudet.

227.

Laske ympyrälieriön tilavuus, jonka korkeus on 15 cm ja

- a) säde 11 cm
- b) halkaisija 13 cm

228.

Ympyrälieriön korkeus on 18,0 cm. Laske lieriön tilavuus, kun sen pohjan säde on

- a) 1,0 cm
- b) 5,9 cm
- c) 12,0 cm.

229.

Laske suoran ympyrälieriön tilavuus, kun pohjan säde r ja lieriön korkeus h ovat

- a) $r = 3,0$ cm ja $h = 4,0$ cm
- b) $r = 13,0$ cm ja $h = 10,0$ cm
- c) $r = 5,5$ cm ja $h = 8,5$ cm.

230.

Jääkiekon halkaisija on 7,6 cm ja korkeus 2,5 cm. Laske kiekon tilavuus.

231.

Turistiluokassa tai lomalennolla matkustajalla saa olla yksi käsimatkatavara. Käsimatkatavarihin menevän lentolaukun koko saa maksimissaan olla (55 x 40 x 20) cm. Paljonko on laukun tilavuus litroina?

———— soveltavat tehtävät —————

232.

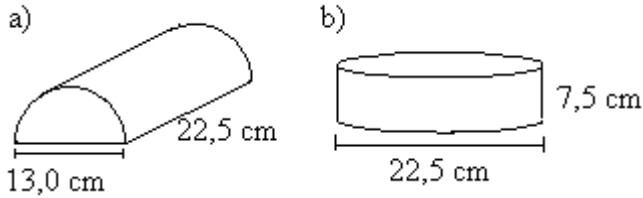
Jäljennä taulukko vihkoosi ja täydennä puuttuvat tiedot.

lieriön pohjan pinta-ala [cm ²]	lieriön korkeus [cm]	lieriön tilavuus [cm ³]
150,0	31,0	
	12,0	804,0
18,0		360,0

	500,0	1 425 000
102,0		4080,0

233.

Laske suklaakakkujen tilavuudet.



234.

Mittaa tarvittavat osat ja määritä

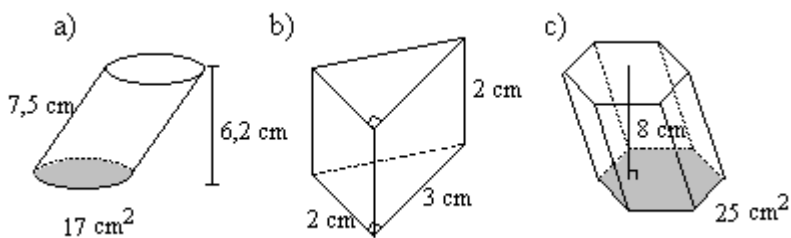
- pulpettisi kannen tilavuus
- matematiikan kirjan tilavuus.

235.

What is the formula for the volume of the cylinder?

236.

Laske lieriön tilavuus.

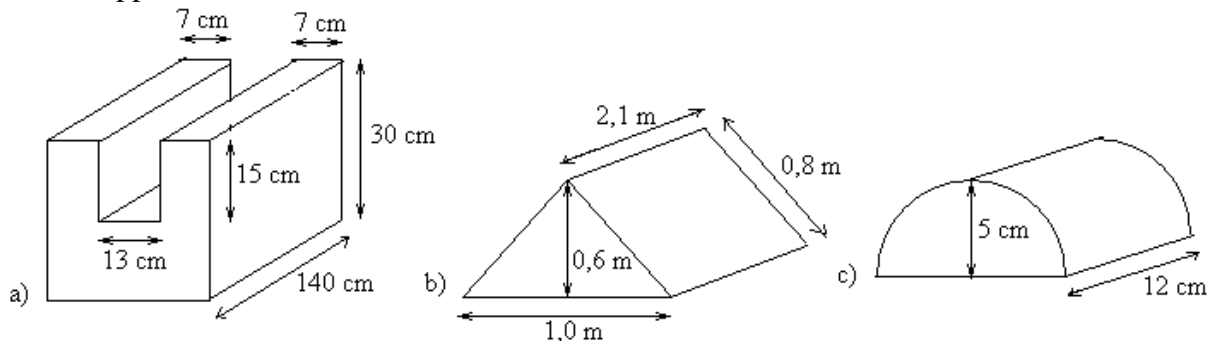


237.

Mehupillin sisähalkaisija on 0,5 cm ja pituus 24,0 cm. Kuinka monta millilitraa mehua pilliin sopii?

238.

Laske kappaleiden tilavuudet.



239.

Muodosta laskukaava kuution, jonka särmän pituus on s , tilavuudelle.

240.

Ympyrälieriön muotoisen litran mitan pohjan halkaisija on 12,0 cm. Kuinka korkea mitta on?

241.

Pisin vedenalainen tunneli kulkee Englannin kanaalin ali Folkestonesta (Englanti) Calais'hen (Ranska). Kulkureitti koostuu kahdesta rautatietunnelista, jotka ovat 49,94 km pitkiä ja halkaisijaltaan 7,6 metriä. Tunnelleita rakennettiin 1987-1990 ja ne maksoivat noin 15 mrd. €. Laske tunneleiden viemä yhteistilavuus.

242.

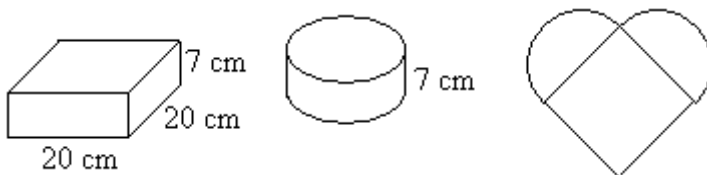
Suorakulmion muotoisesta pahvista, jonka sivut ovat 15 cm ja 12 cm, tehdään avonainen laatikko leikkaamalla kulumista pois neliöt, joiden sivun pituus on 3 cm. Laske laatikon tilavuus.

243.

The orange juice is poured into cylindrical glasses. The radius of each glass is 3 cm and the depth of orange juice is 7 cm. How many glasses of orange juice can be filled from the 1 litre carton?

244.

Sydämen muotoinen täytekakku voidaan tehdä neliö- ja ympyräpohjaisten kakkuvuokien avulla. Kakkuvuokien korkeus on 7 cm ja neliöpohjaisen vuoaan sivun pituus on 20 cm. Neliöpohjainen vuoka on sopiva neljän munan kakkuun. Monenko munan taikina täytyy tehdä sydänkakkua varten?

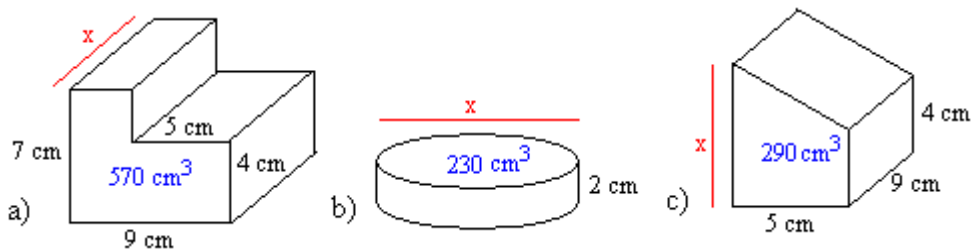


245.

When full, a cardboard carton, in the shape of a cuboid, holds 1 litre of orange juice. The base of the carton measures 9,5 cm by 6,2 cm. What is its height?

246.

Laske x :llä merkityn sivun pituus, kun kappaleen tilavuus on annettu.



vaativat tehtävät

247.

Ympyrälieriön muotoisen säiliön piirustuksen mittasuhte on 1:5. Piirustuksessa säiliön halkaisija on 20 cm ja korkeus 25 cm. Mikä on säiliön todellinen tilavuus?

248.

Suorakulmaisen särmiön särmien pituudet ovat suhteessa 1:1:2. Särmiön kokonaispinta-ala on $12,1 \text{ cm}^2$. Mikä on särmiön tilavuus?

249.

Mukin sisäkorkeus on 7,0 cm ja läpimitta samoin 7,0 cm. Mikä on mukin vetoisuus? (yo syksy 1993)

250.

Litran pulloon kaadetaan 0,930 litraa vettä ja se pannaan pakastimeen. Veden jäätyessä sen tilavuus kasvaa 8 %. Kuinka korkealle tällöin työntyy lieriömäinen jäätulppa $5,00 \text{ cm}^2$ kokoisesta pullon suusta? (yo kevät 1988)

251.

Paperirullan ulkohalkaisija on 12,0 cm ja sisähalkaisija 4,5 cm. Paperin paksuus on 0,1 mm. Kuinka monta metriä rullassa on paperia? (yo syksy 1995)

252.

Suorakulmion muotoisesta peltilevystä (mitat $40 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$) voidaan valmistaa ympyrälieriön vaippa kahdella tavalla: lieriön korkeus on joko 40 cm tai 30 cm. Kumman lieriön tilavuus on suurempi, ja mikä on tilavuuksien suhde? (yo syksy 1999)

253.

Suorakulmisen särmiön muotoisen veistoksen leveys on 2,00 m, pituus 1,00 m ja korkeus 3,00 m. Veistoksesta tehdään pienoismalli, jonka tilavuus on sadasosa alkuperäisen veistoksen tilavuudesta. Mitkä ovat pienoismallin mitat? (yo syksy 1998)

Pyramidit

Pyramideihin liittyy monenlaisia teorioita, joissa huimimmissa esitetään niiden olevan avaruusolioiden rakentamia. Tutkimukset ovat kuitenkin osoittaneet, että pyramidit ovat ihmisen aikaansaannoksia. Ensimmäiset pyramidit rakennettiin muinaisessa Egyptissä, joista ensimmäinen oli kuningas Zhoserin (noin 2668 – 2649 eKr.) hauta. Seuraavan tuhannen vuoden aikana jokainen merkittävä faarao sai hautapaikakseen pyramidin. Ne eivät kuitenkaan olleet pelkkiä hautoja, vaan myös palvonnan kohteita. Tunnetuimmat pyramidit ovat Gizan kolme pyramidia, joista suurin on Kheopsin pyramidi, joka valmistui vuoden 2600 eKr. tienoilla.

Pyramidien rakennuskivien louhinta alkoi siitä, että kallioon piirrettiin louhittavan kivipaaden mitat, jonka jälkeen lohkar hakattiin irti. Kiviä liikuteltiin puisten kelkkojen avulla, sillä pyörää ei ollut vielä käytössä. Rakennuspaikalle kivipaadet kuljetettiin lautoilla jokea pitkin. Huonompilaatuista kalkkikiveä louhittiin itse rakennuspaikalta, jossa kaikki kivet myös muotoiltiin lopulliseen muotoonsa. Lohkareiden särmien suorakulmaisuus tarkistettiin kulmamiatalla.

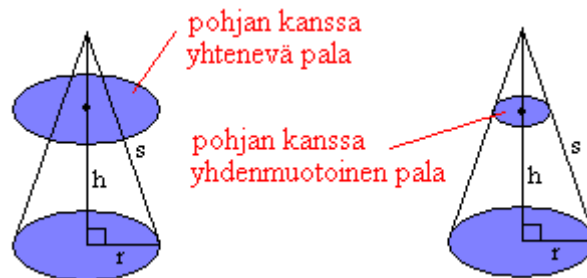
Rakennuspiirustukset tehtiin savitauluihin. Pyramidien pohjamaa tasoitettiin kuokilla ja laaja paasikehä laskettiin neliön muotoon pyramidin perustaksi. Tämä piti tehdä tarkasti, sillä pienikin mittavirhe olisi kertaantunut ylemmissä kiverroksissa. Rakentajilla oli apuvälineinä vain köysiä, vipuvarsia sekä kiviä ja mutaa. Pieniin savilaattoihin upotetut vesisäiliöt toimivat vesivaakana. Jättiläismäiset kivijärkäleet kuljetettiin ihmisvoimin liejuisiksi kasteltuja ramppeja pitkin vetämällä rakennustasolle. Väkipyörää, vinssiä tai taljaa ei vielä tunnettu.

Kheopsin pyramidin rakentamiseen käytetyt kalkkivilohkareet painavat keskimäärin 2,5 – 5 tonnia ja niitä on yli 2,3 miljoonaa. Suurimmat hautakammion katossa olevat kivet ovat painoltaan noin 40 tonnia. Kheopsin pyramidi peitti yli neljän hehtaaria maata ja sen korkeus oli 147 metriä (nykyään sen huipusta puuttuu noin 10 metriä) ja sen kyljet osoittavat varsin tarkasti pääilmansuuntiin.

Kheopsin pyramidin rakentajien määrän arviot vaihtelevat paljon. Historioitsija Herodotos arvioi, että 100 000 miestä raatoi Kheopsin pyramidin kimpussa 30 vuotta. Palkakseen he saivat leipää, retikkaa ja purjosipulia. Brittiläinen egyptologi Wier on esittänyt, että rakentajien lukumäärä on vain noin 10 000 miestä. Hän on perustellut tätä seuraavasti: Kheopsin pyramidin tilavuus oli noin 2,6 miljoonaa kuutiometriä. Tämän kivimäärän nostamiseen tarvitaan kaikkiaan $2,5 \cdot 10^{12}$ joulen työ. Yksi mies voi tehdä päivässä työtä noin 240 000 joulen verran. Wierin mukaan kivien nostaminen vaati 1250 miehen päivittäisen työpanoksen 23 vuoden ajan. Kivien louhimis-, muotoilu- ja vetotöihin tarvittiin miehiä vielä enemmän.

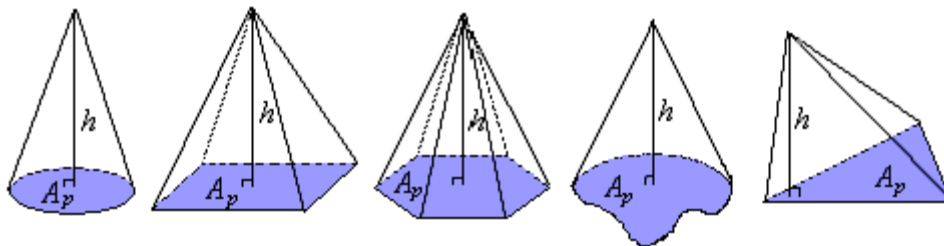
11. Kartion tilavuus

Ympyräkartion tilavuutta ei saada laskettua täyttämällä sitä pohjan kanssa yhtenevillä paloilla. Tällöinhän laskettaisiin ympyrälieriön tilavuutta.



Ympyräkartion tilavuus sitä vastoin saadaan täyttämällä se pohjan kanssa yhdenmuotoisilla paloilla, jotka pienenevät kartion kärkeä kohti mentäessä. Koska yhdenmuotoisten kappaleiden välillä vallitsee suhde, voimme olettaa kartion tilavuuden saatavan seuraavasti:

kartion tilavuus = jokin suhdeluku · vastaavan lieriön tilavuus.



Riippumatta kartion pohjan muodosta lasketaan sen tilavuus aina samalla tavalla. Pohjan muoto tulee huomioitua sen pinta-alan kaavassa.

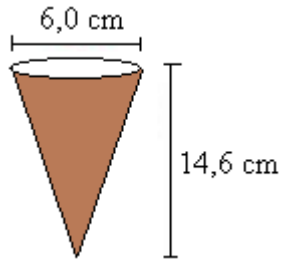
Kartion tilavuus

Kartion tilavuus on $\frac{1}{3}$ sellaisen lieriön tilavuudesta, jonka pohjan pinta-ala A_p ja korkeus h ovat samat kuin kartiolla.

$$V = \frac{1}{3} A_p h.$$

Esimerkki 1.

Lasketaan jäätelötuutin tilavuus.



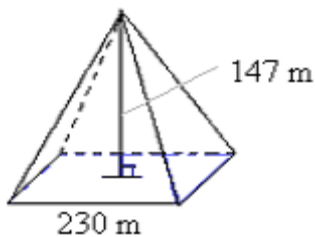
Jäätelötuutti on muodoltaan ympyräkartio, jonka pohjan pinta-ala lasketaan säteen r avulla seuraavasti $A_p = \pi r^2$. Kartion tilavuuden laskukaava tulee siten muotoon

$$V = \frac{1}{3} A_p h = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3,0 \text{ cm})^2 \cdot 14,6 \text{ cm} \approx 138 \text{ cm}^3 \approx 1,4 \text{ dl}$$

Vastaus: Tuutin tilavuus on noin 1,4 dl.

Esimerkki 2.

Kheopsin pyramidi oli alunperin 147 m korkea ja sen pohjasärmän pituus oli 230 m. Lasketaan pyramidin tilavuus.



Pyramidi on kartion erikoistapaus ja sen tilavuus saadaan samojen laskusääntöjen mukaisesti. Pyramidin pohja muodostuu neliöstä, jonka pinta-ala saadaan neliön särmän s avulla seuraavasti $A_p = s^2$. Pyramidin tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} A_p h = \frac{1}{3} s^2 h = \frac{1}{3} \cdot (230 \text{ m})^2 \cdot 147 \text{ m} \approx 2,6 \cdot 10^6 \text{ m}^3$$

Vastaus: Kheopsin pyramidin tilavuus oli alunperin $2,6 \cdot 10^6 \text{ m}^3$.

Tehtäviä

254.

Montako sivua on pyramidissa, jos sen pohja on

- a) nelikulmio
- b) viisikulmio?

255.

Laske suoran ympyräkartion tilavuus, kun pohjan säde r ja kartion korkeus h ovat

- a) $r = 3,0$ cm ja $h = 4,0$ cm
- b) $r = 13,0$ cm ja $h = 10,0$ cm
- c) $r = 5,5$ cm ja $h = 8,5$ cm.

256.

Laske ympyräkartion tilavuus, kun sen säde on 15 cm ja korkeus 20 cm.

257.

Laske ympyräkartion tilavuus, kun sen pohjaympyrän säde on 2,0 cm ja korkeus 8,0 cm.

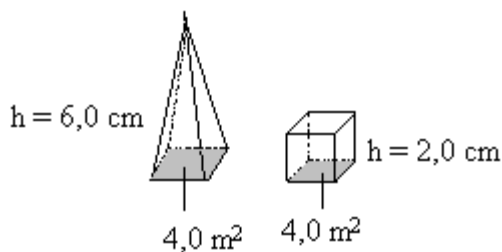
258.

Ympyräkartion korkeus on 18,0 cm. Laske kartion tilavuus, kun sen pohjan säde on

- a) 1,0 cm
- b) 5,9 cm
- c) 12,0 cm.

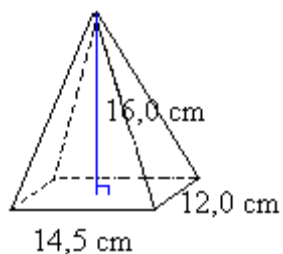
259.

Kummalla kappaleista on suurempi tilavuus?



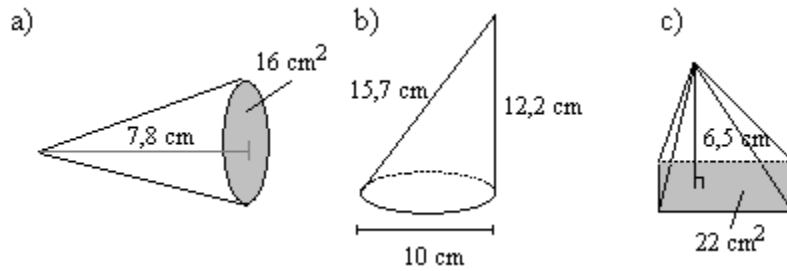
260.

Ilmoita kuvan pashamuotin tilavuus desilitroina.



261.

Laske kartion tilavuus.



262.

Laske pyramidin tilavuus, kun sen korkeus on 6,7 m ja suorakulmion muotoisen pohjan mitat ovat 4,5 m ja 3,8 m.

263.

Pyramidin kolmionmuotoisen pohjan pinta-ala on 38 cm^2 ja korkeus 4,9 cm. Laske pyramidin tilavuus.

264.

Pyramidin korkeus on 4 cm ja sen pohja on neliö, jonka sivun pituus on 6 cm. Laske pyramidin

- a) tilavuus
- b) kokonaispinta-ala.

————— soveltavat tehtävät —————

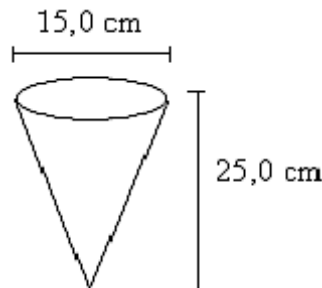
265.

Ympyräkartion pohjaympyrän säde on 2,0 cm, mutta korkeus vaihtelee. Laske, mikä on ympyräkartion korkeus, jos sen tilavuuden tarkka arvo on

- a) $\frac{4}{3} \pi \text{ cm}^3$
- b) $4\pi \text{ cm}^3$
- c) $6\frac{2}{3} \pi \text{ cm}^3$
- d) $\pi \text{ cm}^3$

266.

Montako desilitraa popcornia mahtuu kuvassa olevaan tötteröön?



267.

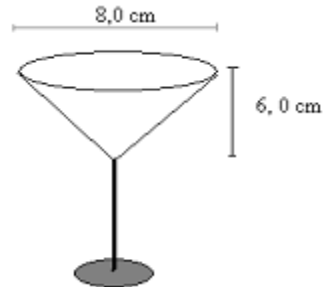
What is the volume of a cone with the given dimensions? Diameter = 14 m, height = 2 m.

268.

What is the volume of a rectangular pyramid with the given dimensions? Length = 4 cm, width = 12 cm, height = 7 cm.

269.

Kuinka monta kuvan mukaista lasillista saadaan 1,5 litran pullosta?



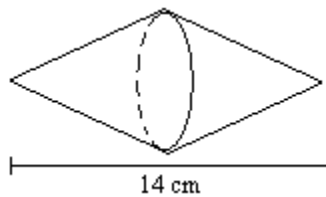
270.

Mikä on ympyräkartion korkeus, kun sen säde on 13 cm ja tilavuus 2600 cm^3 ?

271.

Mikä on ympyräkartion pohjan säde, kun sen korkeus on 1,2 m ja tilavuus $0,40 \text{ m}^3$?

272.

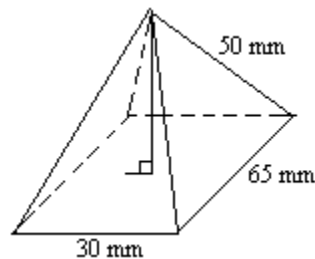


Kappale on valmistettu kahdesta kartiosta, joiden korkeus on yhtä suuri kuin niiden halkaisija. Kartioiden huippujen välinen etäisyys on 14 cm. Laske kappaleen

- a) tilavuus
- b) pinta-ala.

273.

Laske pyramidin tilavuus, kun sen suorakulmion muotoisen pohjan sivujen pituudet ovat 30 mm ja 65 mm sekä särmän pituus 50 mm.



_____ vaativat tehtävät _____

274.

Ympyräkartion halkaisijaa suurennetaan 10 % ja korkeutta pienennetään 5 %. Montako prosenttia kartion tilavuus suurenee?

275.

Miten käy ympyräkartion tilavuudelle, kun sen

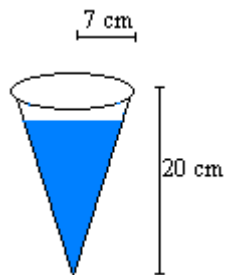
- a) korkeus pienenee puoleen
- b) säde pienenee puoleen?

276.

Puun runkoa pidetään suorana ympyräkartiona. Puun korkeus on 14 m ja tyven läpimitta 24 cm. Vuodessa puu kasvaa pituutta 30 cm, ja sen tyven läpimitta suurenee 4 mm. Kuinka monta dm^3 puun tilavuus tällöin kasvaa viidessä vuodessa? (yo kevät 1994)

277.

Kartion muotoinen lasinen astia, jonka säde on 7 cm ja korkeus 20 cm, täytetään vedellä ja pakastetaan. Vesi laajenee jäätyessään 10 %. Hajoaako astia, jos vettä kaadetaan 19 cm korkeuteen?



278.

Kuinka korkealle vettä voi kaataa edellisen tehtävän kartioon, jotta astia ei hajoa pakkasessa?

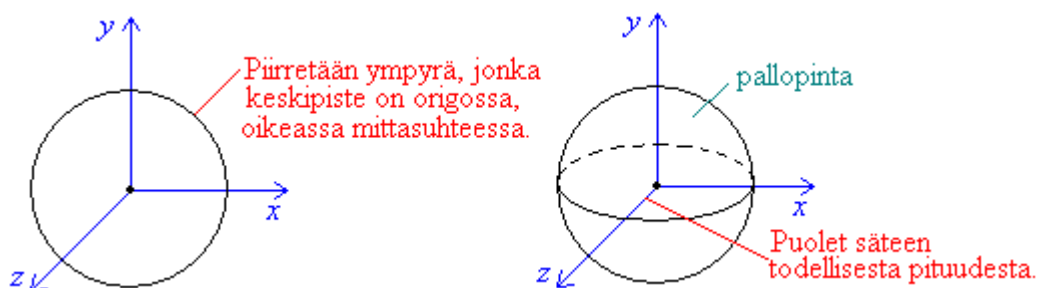
12. Pallo

Kappaleista pallolla on pienin pinta-ala tilavuuteensa verrattuna. Jos kappaleen sisäpaine on suuri, on pallon muoto edullisin. Tästä syystä vapaasti putoava vesipisarakin valitsee muodokseen pallon. Pallonmuotoisia säiliöitä käytetään esimerkiksi kaasujen ja nesteiden säilytykseen tarkoitettuina paineastioina. Nesteitä, jotka on säilytettävä jäädyttyinä, pidetään usein myös pallonmuotoisissa astioissa, koska astian pinta-alan ollessa pienin mahdollinen tulee eristäminen halvimmaksi.

Pallo muodostuu avaruuden niistä pisteistä, jotka ovat yhtä kaukana kiinteästä pisteestä, pallon *keskipisteestä*.

Nimitys pallo voi tarkoittaa joko pallopintaa tai pallopinnan rajoittama avaruuden osaa.

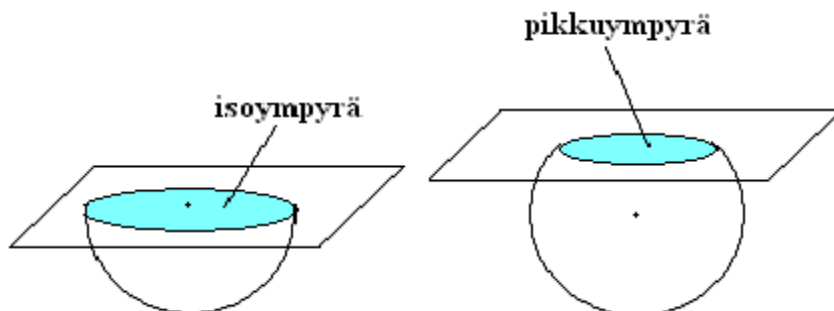
Pallon piirtäminen kolmiulotteisesti tapahtuu seuraavasti:



Kun pallon säde on r , niin *pallon*

tilavuus on $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ *pinta-ala* on $A = 4\pi r^2$.

Tason ja pallon leikkauskuvio on aina ympyrä. Jos taso kulkee pallon keskipisteen kautta, muodostuva leikkauskuvio on *isoympyrä*. Isoympyrän säde on siis sama kuin pallon säde ja ympyrän keskipiste on myös pallon keskipiste. Muita ympyröitä, jotka muodostuvat tason leikatessa ympyrää, sanotaan *pikkuympyröiksi*. Niiden säde on lyhyempi kuin pallon säde.



Maapallon pinnalla tehtävissä mittauksissa isoympyrä on erittäin tärkeä. Lyhyin reitti paikasta toiseen seuraa niiden kautta kulkevaa isoympyrän kaarta. Laivat ja lentokoneet pyrkivätkin kulkemaan maan isoympyrää pitkin jos muut olosuhteet sen sallivat.

Esimerkki 1.

Vesi-ilmapallon säde on 2,5 cm. Lasketaan, montako desilitraa vettä sen sisällä on.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(2,5 \text{ cm})^3 = 65,449\dots \text{ cm}^3 \approx 0,065 \text{ dm}^3 = 0,065 \text{ l} = 0,65 \text{ dl}$$

Vastaus: Vesi-ilmapallon sisällä on 0,65 dl vettä.

Esimerkki 2.

Jalkapallon ympärysmitta on 71,0 cm. Lasketaan jalkapallon pinta-ala.

Ensin on laskettava jalkapallon säde

$$p = 2r\pi \quad || : 2\pi$$

$$r = \frac{p}{2\pi}$$

$$r = \frac{71,0 \text{ cm}}{2\pi} \approx 11,30 \text{ cm}$$

Joten, jalkapallon pinta-ala

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi(11,30 \text{ cm})^2 \approx 1604 \text{ cm}^2$$

Vastaus: Jalkapallon pinta-ala on noin 1600 cm².

Tehtäviä

279.

Piirrä pallo, jonka säde on 4,0 cm.

280.

Piirrä puolipallo, jonka halkaisija on 10,0 cm.

281.

Laske pallon tilavuus, kun sen säde on

- a) 1,0 cm
- b) 2,5 cm
- c) 5,3 cm.

282.

Laske edellisen tehtävän pallojen pinta-alat.

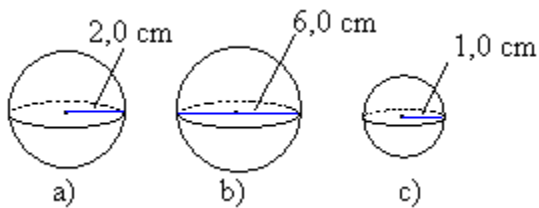
283.

Pallon säde on 21 cm. Laske pallon

- a) pinta-ala.
- b) tilavuus.

284.

Laske pallojen pinta-alat.



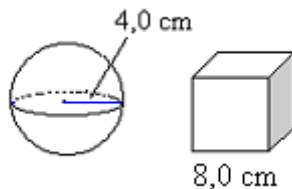
285.

Laske edellisen tehtävän pallojen tilavuudet.

286.

Kummalla kappaleista on suurempi

- a) tilavuus
- b) pinta-ala?



287.

Laske pallon pinta-ala, kun sen halkaisija on

- a) 5 m
- b) 78 cm
- c) 64 mm.

288.

Laske pallon tilavuus, kun sen säde on

- a) 16 cm
- b) 2,8 m
- c) 43 mm.

289.

Tennispallon halkaisija on 6,0 cm. Laske sen

- a) pinta-ala.
- b) tilavuus.

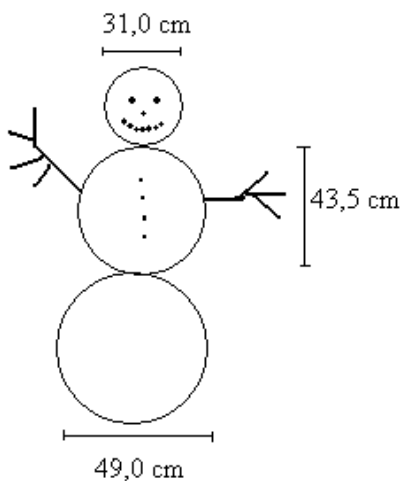
290.

What is the volume of a sphere with the given dimensions? Diameter = 16 cm.

soveltavat tehtävät

291.

Paljonko lunta tarvitaan kuvan lumiukon tekemiseen?



292.

Nicholas Masonilla (Manchester, Iso-Britannia) on maailman vahvimmat keuhkot. Hän puhalsi yhden kilogramman painoisen ilmapallon läpimitaksi 2,44 metriä 45 minuutissa 2,5 sekunnissa v. 1994. Laske muodostuneen ilmapallon tilavuus. Oletetaan ilmapallo pallon muotoiseksi.

293.

Etsi jokin pallon muotoinen esine ja arvioi sen pinta-ala ja tilavuus. Tee sitten tarvittavat mitaukset ja tarkista arviosi laskemalla.

294.

Laske pallon pinta-alan tarkka arvo, kun pallon halkaisija on

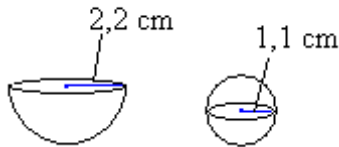
- a) 2,0 m
- b) 4,0 m

- c) 9,0 m
- d) 10,0 m.

295.

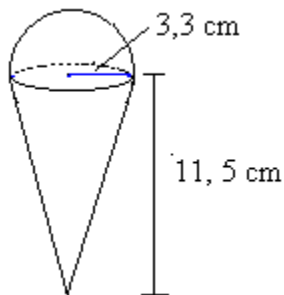
Kummalla kappaleista on suurempi

- a) pinta-ala
- b) tilavuus?



296.

Laske, montako desilitraa jäätelöä mahtuu kuvan jättitötteröön, kun vohvelin sisäosakin on täynnä jäätelöä (kuoren paksuutta ei oteta huomioon).



297.

Mikä on pallon säde, jos sen tilavuuden tarkka arvo on

- a) $\frac{4}{3} \pi \text{ m}^3$
- b) $36\pi \text{ m}^3$
- c) $4\pi \text{ cm}^3$
- d) $10\frac{2}{3} \pi \text{ cm}^3$?

298.

Puolipallon muotoisen rahin halkaisija on 64 cm. Mikä on rahin kokonaispinta-ala?

299.

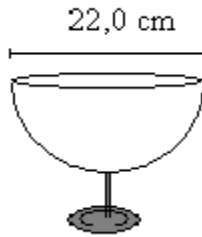
Pata on puolipallon muotoinen. Laske padan tilavuus litroina, kun sen halkaisija on 90,0 cm.

300.

Riikalla on 2 litran kulhollinen täynnä pullataikinaa. Kuinka monta pallon muotoista pullaa hän saa taikinasta, kun yhden pullan halkaisija on 8,0 cm?

301.

Kuinka monta desilitraa mehua mahtuu kuvan puolipallon muotoiseen kulhoon?



302.

Pallon A pinta-ala on 2400 cm^2 ja pallon B tilavuus on 9200 cm^3 . Kumpi palloista on suurempi?

_____ vaativat tehtävät _____

303.

Appelsiinin halkaisija kuorineen on $9,5 \text{ cm}$ ja kuoren paksuus on 1 cm . Kuinka monta prosenttia kuoren tilavuus on koko appelsiinin tilavuudesta?

304.

Neljästä desilitrasta savea muotoillaan kaksi palloa siten, että pienemmän tilavuus on puolet suuremman tilavuudesta. Mitkä ovat pallojen säteet? (yo syksy 1999)

305.

Paavolla on kaksi palloa, joista isomman säde on 15% pienemmän pallon sädettä isompi. Kuinka monta prosenttia suurempi on isomman pallon

- a) pinta-ala
- b) tilavuus?

306.

Puolipallon, jonka tilavuus on 1 m^3 , sisään on asetettu mahdollisimman suuri pallo. Mikä on tämän pallon tilavuus ?

307.

Jäätelötötterö on muodoltaan ympyräkartio, jonka pohjan säde on $2,5 \text{ cm}$ ja korkeus $12,0 \text{ cm}$. Tötterössä olevan jäätelöpallon säde on $3,0 \text{ cm}$. Mahtuisiko pallon sisältämä jäätelömäärä kokonaisuudessaan tötteröön? (yo kevät 1992)

308.

Kuutiolla ja pallolla on yhtä suuret tilavuudet. Kuinka monta prosenttia suurempi on kuution pinta-ala kuin pallon pinta-ala? (yo kevät 1996)

309.

Pallon tilavuus määritettiin upottamalla pallo nesteeseen, jolloin tilavuudeksi saatiin $1,52 \pm 0,03$ litraa. Missä rajoissa pallon halkaisija voi vaihdella? (yo syksy 1997)

310.

Teräskuulilla, joiden halkaisija on 2,1 cm, täytetään suoran ympyrälieriön muotoinen astia, jonka pohjan halkaisija on 17 cm ja korkeus 20 cm. Osoita, että kuulia mahtuu astiaan vähemmän kuin 940. (yo kevät 1998)

311.

Pisimmän välilaskuttoman lennon maapallon ympäri tekivät 4.12.1958 – 7.2.1959 Robert Timm ja John Cook lentokoneella Cessna 172 Hacienda. Matka kesti 64 vuorokautta 22 h 18 min 5 s. Matkan pituus vastasi kuutta kierosta maapallon ympäri. Jos he olisivat pystyneet koko ajan lentämään isoympyrää pitkin, kuinka korkealla maanpinnasta he tuolloin olisivat lentäneet?

312.

Nopeimman lennon maapallon ympäri 31 tuntia 27 min 49 s tekivät Michel Dupont ja Claude Hertu 15.-16.8.1995 Air France -yhtiön Concordella. Koneessa oli yhteensä 80 matkustajaa ja 18 miehistön jäsentä. FAI -säännön mukaan maapallon ympäri lennon tulee olla pidempi, kuin Kravun tai Kauriin kääntöpiirin pituus (36 787,6 km). Kuinka suuri keskimääräinen nopeusero on sillä, lennettiinkö lento sallittua pikkuympyrää vai isoympyrää pitkin? Oleta lentokorkeudeksi 17 km. Onko mahdollista, että ennätys tehtiin lentämällä isoympyrää pitkin?

175.

- a) 200 00
- b) 350
- c) 50 000
- d) 140 000

176.

- a) 5 000 000 m²
- b) 60 000 m²
- c) 900 m²
- d) 2,3 m²
- e) 3 m²
- f) 0,14 m²

177.

- a) 500 ha
- b) 1 000 000 m²
- c) 2 300 m²
- d) 1570 cm²
- e) 5,6 dm²
- f) 2,5 a

178.

- a) 1940 cm²
- b) 13,5 m²
- c) 486 mm²

179.

1400 cm²

180.

726 mm²

181.

112 cm²

182.

1900 cm²

183.

ananaspurkin valmistamiseen

184.

2120 cm²

185.

1590 m²

186.

a) 520 cm²

b) 330 cm²

c) 360 cm²

187.

a) $A_v = 4s^2$

b) $A = 6s^2$

188.

11 m²

189.

339 cm²

190.

a) 490 cm²

b) 610 cm²

c) 310 cm²

191.

a) 10 cm

b) 13 cm

c) 7 cm

192.

a) 26 cm

b) 23 cm

c) 2900 cm²

193.

a) 4

- b) 1,2
- c) 6,5

194.

pienenee 1 %

195.

-

196.

- a) 8 cm^3
- b) 125 mm^3
- c) 33 m^3
- d) 1730 dm^3

197.

- a) 200 cm^3
- b) 19 m^3
- c) 38 dm^3

198.

2800 cm^3 eli $2,8 \text{ dm}^3$

199.

- a) 2000 dm^3
- b) 15000 mm^3
- c) 90 cm^3
- d) $0,1 \text{ dm}^3$

200.

- a) $0,025 \text{ m}^3$
- b) $0,0004 \text{ dm}^3$
- c) $0,2 \text{ cm}^3$
- d) 5 m^3

201.

- a) 4000 dm^3
- b) 1700 mm^3
- c) 110 cm^3
- d) $0,5 \text{ dm}^3$

202.

- a) $0,065 \text{ m}^3$
- b) $0,00044 \text{ dm}^3$
- c) $0,82 \text{ cm}^3$
- d) 1 m^3

203.

- a) 3 cm^3
- b) $0,5 \text{ dm}^3$

- c) $1,62 \text{ dm}^3$
- d) 70 cm^3

204.

- a) 5 l
- b) 50 l
- c) 0,015 ml
- d) 600 ml

205.

- a) volume
- b) area
- c) length
- d) volume
- e) area
- f) volume
- g) area
- h) length

206.

- a) 40 ml
- b) 0,12 dl
- c) 0,3 cl
- d) 500 dl

207.

- a) 2,3 l
- b) 41 dl
- c) 0,02 l
- d) 20,2 cl

208.

- a) 43 cm^3
- b) $0,55 \text{ dm}^3$
- c) $3,60 \text{ dm}^3$
- d) 80 cm^3

209.

- a) 2,8 l
- b) 950 l
- c) 0,025 ml
- d) 612 ml

210.

- a) 4 cm
- b) 6 cm
- c) 10 cm

211.

17,5 gal

212.

14 pinttiä

213.

191

214.

10000

215.

270 tonnia

216.

75

217.

8 cm

218.

50 m

219.

75

220.

- a) tilavuus
- b) pinta-ala
- c) pinta-ala
- d) tilavuus
- e) pituus
- f) pinta-ala
- g) pinta-ala
- h) pinta-ala

221.

Kylmälaukun pohjan sisämitat:

leveys: $27,5 \text{ cm} - 2,5 \text{ cm} - 2,5 \text{ cm} = 22,5 \text{ cm}$

pituus: $39,5 \text{ cm} - 2,5 \text{ cm} - 2,5 \text{ cm} = 34,5 \text{ cm}$

korkeus: $30,5 \text{ cm} - 2,5 \text{ cm} - 3,0 \text{ cm} = 25,0 \text{ cm}$

Laukun sisätilavuus on siten

$$V = 22,5 \text{ cm} \cdot 34,5 \text{ cm} \cdot 25,0 \text{ cm} = 19406,25 \text{ cm}^3 = 19,40625 \text{ dm}^3$$

Vastaus: noin 19,4 litraa.

222.

Astia voidaan täyttää 9 cm:n korkeuteen.

223.

Merkitään kysyttyä korkeutta x :llä, jolloin voidaan muodostaa yhtälö

$$1,1(16 \text{ cm} \cdot 11 \text{ cm} \cdot x) = 16 \text{ cm} \cdot 11 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}$$

$$193,6 \text{ cm}^2 \cdot x = 1760 \text{ cm}^3$$

$$x = \frac{1760 \text{ cm}^3}{193,6 \text{ cm}^2} = 9,09090\dots \text{ cm}$$

Yhden liidun tilavuus on $\frac{230 \text{ cm}^3}{12} = 19,1666\dots \text{ cm}^3$

Liidun pituus on $\frac{19,1666\dots \text{ cm}^3}{(1,5 \text{ cm})^2} = 8,5 \text{ cm}.$

224.

Kuutioiden tilavuudet ovat 27 cm^3 , 64 cm^3 ja 125 cm^3 sekä näiden summa 216 cm^3 . Vastaa-
van kokoisen kuution särmä on $\sqrt[3]{216 \text{ cm}^3} = 6 \text{ cm}$. Annettujen kuutioiden pinta-alat ovat 54 cm^2 , 96 cm^2 ja 150 cm^2 sekä näiden summa 300 cm^2 . Ison kuution pinta-ala on 216 cm^2 , joten pinta-ala pienenee 28 %.

225.

- a) $7,5 \text{ cm}^2$
- b) $4,5 \text{ cm}^2$
- c) $9,0 \text{ cm}^2$
- d) $7,2 \text{ cm}^2$

226.

- a) 94 cm^3
- b) 57 cm^3
- c) 110 cm^3
- d) 90 cm^3

227.

- a) 5700 cm^3
- b) 2000 cm^3

228.

- a) 57 cm^3
- b) 1970 cm^3
- c) 8140 cm^3

229.

- a) 110 cm^3
- b) 5300 cm^3
- c) 810 cm^3

230.

$$110 \text{ cm}^3$$

231.

44 l

232.

lieriön pohjan pinta-ala [cm ²]	lieriön korkeus [cm]	lieriön tilavuus [cm ³]
150,0	31,0	4650
67,0	12,0	804,0
18,0	20,0	360,0
2850	500,0	1 425 000
102,0	40,0	4080,0

233.

a) 1490 cm³

b) 2980 cm³

234.

-

235.

$$V = \pi r^2 h$$

236.

a) 105 cm³

b) 6 cm³

c) 200 cm³

237.

4,7 ml

238.

a) 86100 cm³

b) 0,63 m³

c) 470 cm³

239.

$$V = s^3$$

240.

8,84 cm

241.

4,5 · 10⁶ m³

242.

162 cm³

243.

5

244.

7 munan taikina

245.

17 cm

246.

a) 12 cm

b) 12 cm

c) 9 cm

247.

980 l

248.

2,66 cm³

249.

2,7 dl

250.

Vedestä muodostuvan jään tilavuus on $1,08 \cdot 0,9371 = 1,00441$, joten jäätulpan tilavuus on $0,00441 \text{ l} = 4,4 \text{ cm}^3$. Jäätulpan korkeus on $\frac{4,4 \text{ cm}^3}{5 \text{ cm}^2} = 0,88 \text{ cm}$.

251.

Rullan ulkosäde on 6,0 cm ja sisäsäde 2,25 cm. Merkitään paperin leveyttä a :lla (cm).

Rullalla olevan paperin tilavuus on $\pi \cdot 6,0^2 a - \pi \cdot 2,25^2 a \approx 97,193a$.

Merkitään paperin pituutta x :llä. Auki levitetty paperi on muodoltaan suorakulmainen särmiö, jonka tilavuus on $0,01ax$.

Tästä saadaan yhtälö

$$0,01xa = 97,193a$$

$$x = \frac{97,193a}{0,01a} = \frac{97,193}{0,01} \approx 9700$$

Vastaus: 97 m

252.

Lieriön tilavuus saadaan lasketuksi kaavalla $\pi r^2 h$, missä r on pohjan säde ja h korkeus.

Jos korkeus on 40 cm, pohjan piiri on 30 cm. Merkitään pohjan sädettä tällöin x :llä.

$$2\pi x = 30$$

$$x = \frac{30}{2\pi} = \frac{15}{\pi}$$

Tilavuudeksi saadaan

$$V_1 = \pi \left(\frac{15}{\pi} \right)^2 \cdot 40 = \pi \cdot \frac{15^2}{\pi^2} \cdot 40 = \frac{15^2 \cdot 40}{\pi} = \frac{9000}{\pi} \approx 2860 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Jos korkeus on 30 cm, pohjan piiri on 40 cm. Merkitään pohjan sädettä tällöin y :llä.

$$2\pi y = 40$$

$$y = \frac{40}{2\pi} = \frac{20}{\pi}$$

Tilavuudeksi saadaan

$$V_2 = \pi \left(\frac{20}{\pi} \right)^2 \cdot 30 = \pi \cdot \frac{20^2}{\pi^2} \cdot 30 = \frac{20^2 \cdot 30}{\pi} = \frac{12000}{\pi} \approx 3820 \text{ (cm}^3\text{)}$$

30 cm korkean lieriön tilavuus on suurempi.

$$\text{Tilavuuksien suhde } \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{12000}{\pi}}{\frac{9000}{\pi}} = \frac{12000}{\pi} \cdot \frac{\pi}{9000} = \frac{12000}{9000} = \frac{4}{3}.$$

Vastaus: 30 cm korkean lieriön tilavuus on suurempi. Tilavuuksien suhde on $\frac{4}{3}$.

253.

Merkitään pienoismallin pituutta x :llä (m).

Malli on yhdenmuotoinen veistoksen kanssa, joten pienoismallin leveys on $2x$ ja korkeus $3x$.

Mallin tilavuudeksi saadaan $x \cdot 2x \cdot 3x = 6x^3$.

Veistoksen tilavuus on $1,00 \cdot 2,00 \cdot 3,00 = 6 \text{ (m}^3\text{)}$, joten pienoismallin tilavuus on $\frac{6}{100} = 0,06 \text{ (m}^3\text{)}$.

Saadaan yhtälö

$$6x^3 = 0,06$$

$$x^3 = \frac{0,06}{6}$$

$$x = \sqrt[3]{0,01} \approx 0,2154$$

Pienoismallin pituus on $x \approx 21,5 \text{ cm}$, leveys $2x \approx 43,1 \text{ cm}$ ja korkeus $3x \approx 64,6 \text{ cm}$.

Vastaus: Pituus 21,5 cm, leveys 43,1 cm ja korkeus 63,6 cm.

254.

a) 4

b) 5

255.

a) 38 cm^3

b) 1770 cm^3

c) 270 cm^3

256.

4700 cm^3

257.

34 cm^3

258.

- a) 19 cm^3
- b) 656 cm^3
- c) 2710 cm^3

259.

Kappaleilla on sama tilavuus.

260.

9,3 dl

261.

- a) 42 cm^3
- b) 320 cm^3
- c) 48 cm^3

262.

38 m^3

263.

62 cm^3

264.

- a) 48 cm^3
- b) 96 cm^2

265.

- a) 1 cm
- b) 3 cm
- c) 5 cm
- d) $\frac{3}{4} \text{ cm}$

266.

15 dl

267.

103 m^3

268.

112 cm^3

269.

15

270.

15 cm

271.

0,56 m

272.

- a) 180 cm^3
- b) 170 cm^2

273.

23 cm^3

274.

15 %

275.

- a) pienenee puoleen
- b) pienenee neljäsosaan

276.

Alkuperäinen tilavuus on $V_0 = \frac{1}{3} \pi \cdot 12^2 \cdot 1400 \approx 211115 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Viiden vuoden kuluttua pituus on 1550 cm ja tyven läpimitta 26 cm sekä vastaava tilavuus

$V_5 = \frac{1}{3} \pi \cdot 13^2 \cdot 1550 \approx 274131 \text{ (cm}^3\text{)}$. Tilavuutta on tällöin tullut lisää

$V_5 - V_0 = 63198 \text{ cm}^3 \approx 63 \text{ dm}^3$.

277.

Yhdenmuotoisten kolmioiden avulla saadaan verranto, jolla voidaan laskea muodostuneen vesikartion säde.

$$\frac{x}{19} = \frac{7}{20}$$

$$x = \frac{19 \cdot 7}{20}$$

$$x = 6,65$$

Vesikartion tilavuus on $V_v = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (6,65 \text{ cm})^2 \cdot 19 \text{ cm} \approx 879,88 \text{ cm}^3$.

Vesi laajenee 10 %, jolloin uusi tilavuus on $1,1 \cdot 879,88 \text{ cm}^3 = 967,87 \text{ cm}^3$.

Lasikartion tilavuus on $V_l = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (7 \text{ cm})^2 \cdot 29 \text{ cm} \approx 1026,25 \text{ cm}^3$, joka on suurempi.

Vastaus: ei

278.

Merkitään kysyttyä veden korkeutta x :llä ja tällöin muodostuvan vesikartion sädettä y :llä. Verrannosta saadaan

$$\frac{y}{x} = \frac{7}{20}$$

$$y = \frac{7}{20} x$$

Laajeneminen huomioimalla voimme kirjoittaa yhtälön

$$1,1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{7}{20}x\right)^2 \cdot x = 1026,25 \text{ cm}^3,$$

josta ratkaisuksi saadaan $x \approx 19,3745 \text{ cm}$.

Vastaus: 19,3 cm

279.

-

280.

-

281.

- a) $4,2 \text{ cm}^3$
- b) $65,0 \text{ cm}^3$
- c) 620 cm^3

282.

- a) 13 cm^2
- b) 79 cm^2
- c) 350 cm^2

283.

- a) 5500 cm^2
- b) 39000 cm^3

284.

- a) 50 cm^2
- b) 110 cm^2
- c) 13 cm^2

285.

- a) 34 cm^3
- b) 110 cm^3
- c) $4,2 \text{ cm}^3$

286.

- a) kuutiolla
- b) kuutiolla

287.

- a) 80 m^2
- b) 19000 cm^2
- c) 13000 mm^2

288.

- a) 17000 cm^3
- b) 92 m^3
- c) 330000 mm^3

289.

- a) 110 cm^2
- b) 110 cm^3

290.

2140 cubic centimeters

291.

120 dm^3

292.

$7,6 \text{ m}^3$

293.

-

294.

- a) $4\pi \text{ m}^2$
- b) $16\pi \text{ m}^2$
- c) $18\pi \text{ m}^2$
- d) $100\pi \text{ m}^2$

295.

- a) puolipallolla
- b) puolipallolla

296.

5,4 dl

297.

- a) 1 m
- b) 3 m
- c) $\sqrt[3]{3} \text{ m}$
- d) 2 m

298.

9700 cm^2

299.

190 l

300.

7 pullaa

301.

2,8 dl

302.

A

303.

noin 51 %

304.

3,2 cm ja 4,0 cm

305.

a) 32 %

b) 52 %

306.

0,25 m³

307.

Jäätelötötterön tilavuus $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2,5 \text{ cm})^2 \cdot 12 \text{ cm} \approx 79 \text{ cm}^3$

ja jäätelöpallon tilavuus $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (3,0 \text{ cm})^3 \approx 113 \text{ cm}^3$ eli jäätelö ei mahdu tötteröön.

308.

Merkitään kuution sivun pituutta a :lla ja pallon sädettä r :llä. Kuution tilavuus on a^3 ja pallon tilavuus $\frac{4}{3}\pi r^3$. Tilavuudet ovat yhtä suuret, joten

$$a^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

Kuution pinta-ala on $6a^2$ ja pallon $4\pi r^2$. Kuution pinta-alan suhde pallon pinta-alaan on

$$\frac{6a^2}{4\pi r^2} = \frac{6\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi r^3}\right)^2}{4\pi r^2} = \frac{6\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi} \cdot r\right)^2}{4\pi r^2} = \frac{6\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi}\right)^2 r^2}{4\pi r^2} = \frac{6\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi}\right)^2}{4\pi} \approx 1,241$$

Vastaus: Kuution pinta-ala on 24,1 % pallon pinta-alaa suurempi.

309.

Pallon pienin mahdollinen tilavuus on $1,52 - 0,03 = 1,49$ litraa eli $1,49 \text{ dm}^3$ ja vastaavasti suurin $1,55 \text{ dm}^3$.

Pallon tilavuus saadaan laskettua kaavalla $\frac{4}{3}\pi r^3$, missä r on pallon säde.

Säde on pienin, kun tilavuus on pienin eli

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 1,49$$

$$r^3 = \frac{1,49 \cdot 3}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1,49 \cdot 3}{4\pi}} \approx 0,7085 \text{ (dm)}$$

Säde on suurin, kun tilavuus on suurin eli

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 1,55$$

$$r^3 = \frac{1,55 \cdot 3}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1,55 \cdot 3}{4\pi}} \approx 0,7179 \text{ (dm)}$$

Tällöin pienin halkaisija on $2 \cdot 0,7085 \text{ dm} \approx 1,42 \text{ dm} = 14,2 \text{ cm}$ ja suurin $2 \cdot 0,7179 \text{ dm} \approx 1,44 \text{ dm} = 14,4 \text{ cm}$.

Vastaus: Halkaisija on 14,2 cm - 14,4 cm.

310.

Kuulan tilavuus on $\frac{4}{3}\pi r^3$, missä $r = \frac{2,1}{2} = 1,05 \text{ (cm)}$.

940:n kuulan yhteistilavuus on $940 \cdot \frac{4}{3}\pi(1,05)^3 \approx 4558 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Lasketaan lieriön tilavuus kaavalla $\pi R^2 h$, missä $R = \frac{17}{2} = 8,5 \text{ (cm)}$ ja $h = 20 \text{ cm}$:

$$\pi R^2 h = \pi \cdot (8,5)^2 \cdot 20 \approx 4540 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Kuulien yhteistilavuus on suurempi kuin lieriön tilavuus, joten kuulat eivät mahdu astiaan.

311.

32000 km

312.

Isoympyrää pitkin olisi pitänyt lentää 100 km/h nopeammin. On mahdollista, sillä Concorde'n nopeus voi olla jopa 2300 km/h.